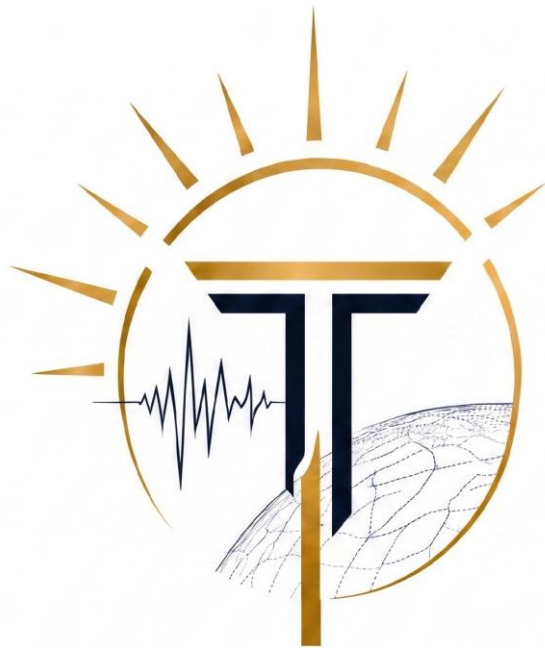




hPIM



HIGHER-ORDER POLYNOMIAL INTEGRATION METHOD

Formulación, estabilización y validación preliminar de 1PIM y 2PIM



M.Sc(TUM). Marcelo Moncayo Theurer

THEK Research Institute

Septiembre 2026





Estado del trabajo: Este artículo presenta la formulación vigente de 1PIM y 2PIM y una validación numérica preliminar frente a diferencias centrales, Newmark y una referencia RK4 fina.

Resumen

Se presenta hPIM — *Higher-order Polynomial Integration Method* — como una familia de integración temporal para dinámica estructural basada en representaciones polinómicas locales.

El desarrollo se concentra en dos variantes. **1PIM** utiliza una interpolación cúbica de desplazamientos y, en su versión estabilizada, impone el equilibrio dinámico en t_{i+1} ; esta elección anula la raíz computacional parásita en el oscilador no amortiguado, pero mantiene una región de estabilidad condicional comparable a diferencias centrales.

2PIM adopta una aceleración cuadrática dentro de cada paso, integra exactamente para obtener velocidad cúbica y desplazamiento cuártico, y determina simultáneamente las aceleraciones en el punto medio y en el extremo del paso mediante un sistema 2×2 de equilibrio dinámico.

La validación preliminar frente a una referencia RK4 de paso fino muestra que 1PIM reproduce un comportamiento muy próximo a diferencias centrales y exhibe un orden observado cercano a segundo orden. 2PIM presenta errores considerablemente menores para el mismo paso temporal y mantiene precisión útil con pasos mayores. Para los períodos $T = 0.3, 0.7, 1.0$ y 1.5 s, el RMSE promedio de 2PIM fue inferior al de Newmark de aceleración promedio, diferencias centrales y 1PIM en todos los pasos ensayados entre 0.01 y 0.08 s. Estos resultados sugieren una ventaja de 2PIM en precisión por paso, aunque todavía deben evaluarse formalmente su costo computacional y desempeño en sistemas no lineales.

Palabras clave: integración dinámica; hPIM; PIM; 1PIM; 2PIM; Newmark; diferencias centrales; aceleración cuadrática; interpolación polinómica; estabilidad; convergencia.





1. Introducción

La ecuación de movimiento de un sistema lineal de un grado de libertad puede escribirse como

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t). \quad (1)$$

Donde: m = masa; $u(t)$ = desplazamiento relativo; c = coeficiente de amortiguamiento viscoso; k = rigidez; $p(t)$ = carga dinámica equivalente; $\dot{u}(t)$ = velocidad; $\ddot{u}(t)$ = aceleración.

En excitación sísmica de base,

$$p(t) = -m a_g(t), \quad (2)$$

Donde: $p(t)$ = carga dinámica equivalente por excitación de base; m = masa; $a_g(t)$ = aceleración del terreno.

El objetivo de un integrador temporal es avanzar desde un estado conocido ($u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$) hacia el estado siguiente manteniendo error, estabilidad y costo computacional dentro de límites aceptables.

El método de Newmark constituye una de las referencias clásicas para este problema [1, 7, 8]. En su forma de aceleración promedio, γ y β , es de segundo orden e incondicionalmente estable para el problema lineal bajo las condiciones clásicas [2, 7, 8]. Diferencias centrales, por su parte, es un método explícito y transparente, pero condicionalmente estable; la documentación de OpenSees expresa su condición clásica como equivalente a [3].

hPIM parte de una observación distinta: las fórmulas de velocidad y aceleración pueden interpretarse como derivadas de una representación polinómica local. El interés es diseñar un integrador donde el orden del polinomio, los puntos internos de evaluación y las ecuaciones de equilibrio formen una arquitectura controlada.

La formulación conceptual inicial de esta línea fue documentada previamente por Moncayo Theurer [9], con la secuencia FGRET – VRR – NFF; la denominación actual de la familia es hPIM.





Debe distinguirse hPIM de antecedentes que también asumen aceleración cuadrática. Ghassemieh y Karimi-Rad propusieron en 2008 una familia de integración de aceleración cuadrática con parámetros de estabilidad [4]. Gholampour y Ghassemieh desarrollaron posteriormente formulaciones de residuos ponderados donde la aceleración es cuadrática y el desplazamiento cuártico [5, 6]. La formulación 2PIM presentada aquí comparte el uso de aceleración cuadrática, pero emplea una arquitectura específica basada en los estados a_i , $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} , con equilibrio simultáneo en el punto medio y en el extremo y solución directa de un sistema interno 2×2 . En la revisión bibliográfica realizada no se identificó una formulación previa idéntica a esta arquitectura; esta observación se formula de manera prudente y no como reclamación absoluta de prioridad.

2. Parámetros dinámicos e inicialización común

Para todas las formulaciones se adoptan los siguientes parámetros:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3)$$

Donde: ω = frecuencia circular natural; k = rigidez; m = masa.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4)$$

Donde: T = período natural; ω = frecuencia circular natural.

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2\zeta m\omega. \quad (5)$$

Donde: c = coeficiente de amortiguamiento viscoso; ζ = razón de amortiguamiento crítico; m = masa; k = rigidez; ω = frecuencia circular natural.

Los valores iniciales mínimos son

$$u_0 = u(0), \quad v_0 = \dot{u}(0). \quad (6)$$

Donde: u_0 = desplazamiento inicial; v_0 = velocidad inicial; $\dot{u}_0$ = derivada temporal inicial del desplazamiento.



La aceleración inicial se obtiene directamente del equilibrio:

$$a_0 = \ddot{u}_0 = \frac{p_0 - cv_0 - ku_0}{m}. \quad (7)$$

Donde: a_0 = aceleración inicial; p_0 = carga dinámica en el instante inicial; c = amortiguamiento; v_0 = velocidad inicial; k = rigidez; u_0 = desplazamiento inicial; m = masa.

Para un acelerograma,

$$p_0 = -ma_g(0). \quad (8)$$

Donde: p_0 = carga dinámica inicial; m = masa; $a_g(0)$ = aceleración inicial del terreno.

Estas expresiones constituyen las condiciones de inicio para Newmark y 2PIM. 1PIM, por ser una recurrencia cúbica que utiliza un estado anterior, requiere además un valor virtual u_{-1} , calculado mediante expansión de Taylor de segundo orden:

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t v_0 + \frac{\Delta t^2}{2} a_0. \quad (9)$$

Donde: u_{-1} = desplazamiento virtual anterior; u_0 = desplazamiento inicial; Δt = paso temporal; v_0 = velocidad inicial; a_0 = aceleración inicial.

3. Métodos de referencia

3.1. Diferencias centrales

Las aproximaciones clásicas son

$$\dot{u}_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}, \quad (10)$$

Donde: $\dot{u}_i$ = velocidad aproximada en el paso i ; u_{i+1} y u_{i-1} = desplazamientos de los pasos adyacentes; Δt = paso temporal.

$$\ddot{u}_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}. \quad (11)$$

Donde: $\ddot{u}_i$ = aceleración aproximada en el paso i ; u_{i+1} , u_i y u_{i-1} = desplazamientos; Δt = paso temporal.

Sustituyendo en el equilibrio se obtiene

$$A_c u_{i+1} = p_i + B_c u_i + C_c u_{i-1}, \quad (12)$$

Donde: A_c , B_c y C_c = coeficientes del esquema de diferencias centrales; u_{i+1} , u_i y u_{i-1} = desplazamientos; p_i = carga dinámica en el paso i .

con

$$A_c = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}, \quad (13)$$

Donde: A_c = coeficiente principal de diferencias centrales; m = masa; c = amortiguamiento viscoso; Δt = paso temporal.

$$B_c = \frac{2m}{\Delta t^2} - k, \quad (14)$$

Donde: B_c = coeficiente de diferencias centrales; m = masa; Δt = paso temporal; k = rigidez.

$$C_c = \frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}. \quad (15)$$

Donde: C_c = coeficiente de diferencias centrales; c = amortiguamiento viscoso; Δt = paso temporal; m = masa.

Por tanto,

$$u_{i+1} = \frac{p_i + B_c u_i + C_c u_{i-1}}{A_c}. \quad (16)$$

Donde: u_{i+1} = desplazamiento calculado en el paso siguiente; p_i = carga en el paso i ; B_c y C_c = coeficientes auxiliares; A_c = coeficiente principal; u_i y u_{i-1} = desplazamientos conocidos.

El primer desplazamiento se obtiene usando: u_{-1}

$$u_1 = \frac{p_0 + B_c u_0 + C_c u_{-1}}{A_c}. \quad (17)$$

Donde: u_1 = primer desplazamiento calculado; p_0 = carga inicial; B_c , C_c y A_c = coeficientes de diferencias centrales; u_0 = desplazamiento inicial; u_{-1} = desplazamiento virtual anterior.

Para el oscilador no amortiguado, la estabilidad exige



$$\omega \Delta t \leq 2. \quad (18)$$

Donde: ω = frecuencia circular natural; Δt = paso temporal; el valor 2 define el límite clásico de estabilidad del oscilador no amortiguado.

3.2. Newmark de aceleración promedio

La familia de Newmark se expresa mediante

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) a_i + \beta a_{i+1} \right], \quad (19)$$

Donde: u_{i+1} y u_i = desplazamientos; v_i = velocidad; a_i y a_{i+1} = aceleraciones; Δt = paso temporal; β = parámetro de Newmark.

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t [(1 - \gamma) a_i + \gamma a_{i+1}]. \quad (20)$$

Donde: v_{i+1} y v_i = velocidades; a_i y a_{i+1} = aceleraciones; Δt = paso temporal; γ = parámetro de Newmark.

En la comparación se utiliza

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Donde: β y γ = parámetros de integración de Newmark correspondientes al esquema de aceleración promedio.

Definiendo

$$a_0^N = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, \quad a_1^N = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \quad a_2^N = \frac{1}{\beta \Delta t}, \quad (22)$$

Donde: a_0^N , a_1^N y a_2^N = coeficientes auxiliares de Newmark; β y γ = parámetros de Newmark; Δt = paso temporal.

$$a_3^N = \frac{1}{2\beta} - 1, \quad a_4^N = \frac{\gamma}{\beta} - 1, \quad a_5^N = \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right), \quad (23)$$

Donde: a_3^N , a_4^N y a_5^N = coeficientes auxiliares de Newmark; β y γ = parámetros de Newmark; Δt = paso temporal.

La rigidez efectiva es

$$k_{\text{eff}} = k + a_0^N m + a_1^N c. \quad (24)$$

Donde: k_{eff} = rigidez efectiva; k = rigidez; a_0^N y a_1^N = coeficientes de Newmark; m = masa; c = amortiguamiento viscoso.





La carga efectiva es

$$p_{\text{eff},i+1} = p_{i+1} + m(a_0^N u_i + a_2^N v_i + a_3^N a_i) + c(a_1^N u_i + a_4^N v_i + a_5^N a_i). \quad (25)$$

Donde: $p_{\text{eff},i+1}$ = carga efectiva en el paso $i+1$; p_{i+1} = carga externa; m = masa; c = amortiguamiento; $a_0^N \dots a_5^N$ = coeficientes de Newmark; u_i , v_i y a_i = estado conocido.

Luego,

$$u_{i+1} = \frac{p_{\text{eff},i+1}}{k_{\text{eff}}}, \quad (26)$$

Donde: u_{i+1} = desplazamiento siguiente; $p_{\text{eff},i+1}$ = carga efectiva; k_{eff} = rigidez efectiva.

$$a_{i+1} = a_0^N(u_{i+1} - u_i) - a_2^N v_i - a_3^N a_i, \quad (27)$$

Donde: a_{i+1} = aceleración siguiente; a_0^N , a_2^N y a_3^N = coeficientes de Newmark; u_{i+1} y u_i = desplazamientos; v_i = velocidad; a_i = aceleración conocida.

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t[(1 - \gamma)a_i + \gamma a_{i+1}]. \quad (28)$$

Donde: v_{i+1} = velocidad siguiente; v_i = velocidad conocida; Δt = paso temporal; γ = parámetro de Newmark; a_i y a_{i+1} = aceleraciones.

4. 1PIM estabilizado

4.1. Interpolación cúbica

1PIM utiliza cuatro desplazamientos locales,

$$\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}\}, \quad (29)$$

Donde: u_{i-1} , u_i , u_{i+1} y u_{i+2} = cuatro desplazamientos locales consecutivos usados por la interpolación cúbica; i = índice temporal.

correspondientes a un polinomio cúbico. El análisis de estabilidad mostró que la colocación en el punto medio deja una raíz computacional en el límite de estabilidad. La versión adoptada en este trabajo impone el equilibrio en t_{i+1} , es decir,

$$\theta = 1. \quad (30)$$





Donde: θ = coordenada adimensional de colocación dentro de la interpolación; $\theta = 1$ corresponde al extremo t_{i+1} adoptado en 1PIM.

En ese punto, las derivadas del polinomio cúbico son

$$\dot{u}_{i+1} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{6} u_{i-1} - u_i + \frac{1}{2} u_{i+1} + \frac{1}{3} u_{i+2} \right), \quad (31)$$

Donde: $\dot{u}_{i+1}$ = velocidad aproximada en t_{i+1} ; u_{i-1} , u_i , u_{i+1} y u_{i+2} = desplazamientos locales; Δt = paso temporal.

$$\ddot{u}_{i+1} \approx \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{\Delta t^2}. \quad (32)$$

Donde: $\ddot{u}_{i+1}$ = aceleración aproximada en t_{i+1} ; u_i , u_{i+1} y u_{i+2} = desplazamientos; Δt = paso temporal.

El equilibrio dinámico se impone como

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}. \quad (33)$$

Donde: m = masa; $\ddot{u}_{i+1}$ = aceleración; c = amortiguamiento; $\dot{u}_{i+1}$ = velocidad; k = rigidez; u_{i+1} = desplazamiento; p_{i+1} = carga dinámica en t_{i+1} .

Agrupando términos,

$$A_1 u_{i+2} + B_{-1} u_{i-1} + B_0 u_i + B_1 u_{i+1} = p_{i+1}, \quad (34)$$

Donde: A_1 , B_{-1} , B_0 y B_1 = coeficientes de la recurrencia 1PIM; u_{i+2} , u_{i-1} , u_i y u_{i+1} = desplazamientos; p_{i+1} = carga dinámica.

con

$$A_1 = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{3\Delta t}, \quad (35)$$

Donde: A_1 = coeficiente principal de 1PIM; m = masa; c = amortiguamiento viscoso; Δt = paso temporal.

$$B_{-1} = \frac{c}{6\Delta t}, \quad (36)$$

Donde: B_{-1} = coeficiente asociado a u_{i-1} ; c = amortiguamiento viscoso; Δt = paso temporal.

$$B_0 = \frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{\Delta t}, \quad (37)$$





Donde: B_0 = coeficiente asociado a u_i ; m = masa; c = amortiguamiento viscoso; Δt = paso temporal.

$$B_1 = -\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} + k. \quad (38)$$

Donde: B_1 = coeficiente asociado a u_{i+1} ; m = masa; c = amortiguamiento viscoso; Δt = paso temporal; k = rigidez.

La recurrencia final es

$$u_{i+2} = \frac{p_{i+1} - B_{-1}u_{i-1} - B_0u_i - B_1u_{i+1}}{A_1} \quad (39)$$

Donde: u_{i+2} = desplazamiento desconocido; p_{i+1} = carga dinámica; A_1 , B_{-1} , B_0 y B_1 = coeficientes 1PIM; u_{i-1} , u_i y u_{i+1} = desplazamientos conocidos.

4.2. Inicio de 1PIM

1PIM puede iniciarse sin recurrir a Newmark. Se calculan, en orden:

$$a_0 = \frac{p_0 - cv_0 - ku_0}{m}, \quad (40)$$

Donde: a_0 = aceleración inicial; p_0 = carga inicial; c = amortiguamiento; v_0 = velocidad inicial; k = rigidez; u_0 = desplazamiento inicial; m = masa.

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t v_0 + \frac{\Delta t^2}{2} a_0, \quad (41)$$

Donde: u_{-1} = desplazamiento virtual anterior; u_0 = desplazamiento inicial; Δt = paso temporal; v_0 = velocidad inicial; a_0 = aceleración inicial.

$$u_1 = \frac{p_0 + B_c u_0 + C_c u_{-1}}{A_c}. \quad (42)$$

Donde: u_1 = primer desplazamiento; p_0 = carga inicial; B_c , C_c y A_c = coeficientes de diferencias centrales usados para iniciar 1PIM; u_0 y u_{-1} = desplazamientos conocidos.

Con u_{-1} , u_0 y u_1 conocidos, la recurrencia 1PIM evaluada en t_1 produce u_2 , y a partir de allí el avance continúa directamente.



4.3. Comportamiento lineal de 1PIM

Para $c = 0$, $p = 0$ y $r = \omega\Delta t$, el polinomio característico se reduce a

$$\lambda[\lambda^2 + (r^2 - 2)\lambda + 1] = 0. \quad (43)$$

Donde: λ = raíz o factor de amplificación del esquema; $r = \omega\Delta t$ = parámetro adimensional de frecuencia; ω = frecuencia circular natural; Δt = paso temporal.

La raíz computacional es

$$\lambda_p = 0, \quad (44)$$

Donde: λ_p = raíz computacional o parásita de 1PIM.

por lo que el modo parásito queda eliminado inmediatamente. Las dos raíces físicas permanecen de módulo unitario mientras

$$0 \leq r \leq 2, \quad (45)$$

Donde: $r = \omega\Delta t$ = parámetro adimensional; el intervalo $0 \leq r \leq 2$ corresponde a la región estable indicada para el caso no amortiguado.

o equivalentemente

$$\boxed{\omega\Delta t \leq 2.} \quad (46)$$

Donde: ω = frecuencia circular natural; Δt = paso temporal.

En consecuencia, 1PIM estabilizado es **condicionalmente estable** en el caso no amortiguado y conserva un límite semejante al de diferencias centrales. Esta lectura se contrasta con los criterios clásicos de estabilidad de integración temporal [7, 8].



5. 2PIM — formulación cuártica one-step

5.1. Hipótesis polinómica

2PIM representa la aceleración dentro del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ mediante un polinomio cuadrático definido por

$$a_i, \quad a_{i+1/2}, \quad a_{i+1}. \quad (47)$$

Donde: a_i , $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones en el inicio, punto medio y final del paso, respectivamente.

La integración exacta de esa aceleración genera una velocidad cúbica y un desplazamiento cuártico. La actualización al final del paso es:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta t}{6} (a_i + 4a_{i+1/2} + a_{i+1}) \quad (48)$$

Donde: v_{i+1} y v_i = velocidades al final e inicio del paso; Δt = paso temporal; a_i , $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones nodales de 2PIM.

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left(\frac{a_i}{6} + \frac{a_{i+1/2}}{3} \right) \quad (49)$$

Donde: u_{i+1} y u_i = desplazamientos al final e inicio; v_i = velocidad inicial del paso; Δt = paso temporal; a_i y $a_{i+1/2}$ = aceleraciones de 2PIM.

Los estados en el punto medio son

$$v_{i+1/2} = v_i + \Delta t \left(\frac{5}{24} a_i + \frac{1}{3} a_{i+1/2} - \frac{1}{24} a_{i+1} \right), \quad (50)$$

Donde: $v_{i+1/2}$ = velocidad en el punto medio; v_i = velocidad inicial; Δt = paso temporal; a_i , $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones del paso.

$$u_{i+1/2} = u_i + \frac{\Delta t}{2} v_i + \Delta t^2 \left(\frac{7}{96} a_i + \frac{1}{16} a_{i+1/2} - \frac{1}{96} a_{i+1} \right). \quad (51)$$





Donde: $u_{i+1/2}$ = desplazamiento en el punto medio; u_i y v_i = estado inicial; Δt = paso temporal; a_i , $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones del paso.

5.2. Ecuaciones de equilibrio internas

Se imponen simultáneamente:

$$ma_{i+1/2} + cv_{i+1/2} + ku_{i+1/2} = p_{i+1/2}, \quad (52)$$

Donde: m = masa; $a_{i+1/2}$ = aceleración de punto medio; c = amortiguamiento; $v_{i+1/2}$ = velocidad de punto medio; k = rigidez; $u_{i+1/2}$ = desplazamiento de punto medio; $p_{i+1/2}$ = carga de punto medio.

$$ma_{i+1} + cv_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}. \quad (53)$$

Donde: m = masa; a_{i+1} = aceleración final; c = amortiguamiento; v_{i+1} = velocidad final; k = rigidez; u_{i+1} = desplazamiento final; p_{i+1} = carga al final del paso.

La aceleración conocida al inicio del paso es

$$a_i = \frac{p_i - cv_i - ku_i}{m}. \quad (54)$$

Donde: a_i = aceleración conocida al inicio del paso; p_i = carga dinámica; c = amortiguamiento; v_i = velocidad; k = rigidez; u_i = desplazamiento; m = masa.

Para un acelerograma discretizado, en la validación se adoptó interpolación lineal de la carga en el punto medio:

$$p_{i+1/2} \approx \frac{p_i + p_{i+1}}{2}. \quad (55)$$

Donde: $p_{i+1/2}$ = carga interpolada en el punto medio; p_i y p_{i+1} = cargas en los extremos del paso.





Tras sustituir las expresiones cinemáticas se obtiene el sistema

$$A_{11}a_{i+1/2} + A_{12}a_{i+1} = b_1, \quad (56)$$

Donde: A_{11} y A_{12} = coeficientes de la primera ecuación del sistema interno; $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones desconocidas; b_1 = término independiente.

$$A_{21}a_{i+1/2} + A_{22}a_{i+1} = b_2, \quad (57)$$

Donde: A_{21} y A_{22} = coeficientes de la segunda ecuación del sistema interno; $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones desconocidas; b_2 = término independiente.

con

$$A_{11} = m + \frac{c\Delta t}{3} + \frac{k\Delta t^2}{16}, \quad (58)$$

Donde: A_{11} = coeficiente del sistema interno 2PIM; m = masa; c = amortiguamiento; k = rigidez; Δt = paso temporal.

$$A_{12} = -\frac{c\Delta t}{24} - \frac{k\Delta t^2}{96}, \quad (59)$$

Donde: A_{12} = coeficiente del sistema interno 2PIM; c = amortiguamiento; k = rigidez; Δt = paso temporal.

$$A_{21} = \frac{2c\Delta t}{3} + \frac{k\Delta t^2}{3}, \quad (60)$$

Donde: A_{21} = coeficiente del sistema interno 2PIM; c = amortiguamiento; k = rigidez; Δt = paso temporal.

$$A_{22} = m + \frac{c\Delta t}{6}. \quad (61)$$

Donde: A_{22} = coeficiente del sistema interno 2PIM; m = masa; c = amortiguamiento; Δt = paso temporal.

Los términos independientes son

$$b_1 = p_{i+1/2} - c\left(v_i + \frac{5\Delta t}{24}a_i\right) - k\left(u_i + \frac{\Delta t}{2}v_i + \frac{7\Delta t^2}{96}a_i\right), \quad (62)$$

Donde: b_1 = término independiente de la ecuación de equilibrio en el punto medio; $p_{i+1/2}$ = carga de punto medio; c , k = amortiguamiento y rigidez; u_i , v_i , a_i = estado conocido; Δt = paso temporal.





$$b_2 = p_{i+1} - c\left(v_i + \frac{\Delta t}{6}a_i\right) - k\left(u_i + \Delta t v_i + \frac{\Delta t^2}{6}a_i\right). \quad (63)$$

Donde: b_2 = término independiente de la ecuación de equilibrio al final del paso; p_{i+1} = carga final; c , k = amortiguamiento y rigidez; u_i , v_i , a_i = estado conocido; Δt = paso temporal.

Definiendo

$$D = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, \quad (64)$$

Donde: D = determinante del sistema interno 2PIM; A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} = coeficientes de la matriz del sistema.

Las dos aceleraciones incógnitas se obtienen directamente:

$$a_{i+1/2} = \frac{b_1A_{22} - A_{12}b_2}{D} \quad (65)$$

Donde: $a_{i+1/2}$ = aceleración de punto medio; b_1 y b_2 = términos independientes; A_{12} y A_{22} = coeficientes del sistema; D = determinante.

$$a_{i+1} = \frac{A_{11}b_2 - A_{21}b_1}{D} \quad (66)$$

Donde: a_{i+1} = aceleración al final del paso; A_{11} y A_{21} = coeficientes del sistema; b_1 y b_2 = términos independientes; D = determinante.

Después se actualizan u_{i+1} y v_{i+1} con las dos ecuaciones de integración indicadas al inicio de la sección.

5.3. Condiciones de inicio de 2PIM

2PIM necesita únicamente

$$u_0, \quad v_0, \quad p_0, \quad (67)$$

Donde: u_0 = desplazamiento inicial; v_0 = velocidad inicial; p_0 = carga dinámica inicial.

y calcula

$$a_0 = \frac{p_0 - cv_0 - ku_0}{m}. \quad (68)$$





Donde: a_0 = aceleración inicial; p_0 = carga inicial; c = amortiguamiento; v_0 = velocidad inicial; k = rigidez; u_0 = desplazamiento inicial; m = masa.

No requiere un estado ficticio u_{-1} ni un predictor externo. En cada paso se resuelve únicamente el sistema interno 2×2 .

6. Diseño de la validación numérica preliminar

La validación se realizó sobre el segmento verificado del registro Kobe-Takatori 90° disponible en el archivo de trabajo: 900 muestras,

$$0 \leq t \leq 8.99 \text{ s y } \Delta t_0 = 0.01 \text{ s.}$$

Se estudiaron cuatro osciladores SDOF con

$$T = 0.3, 0.7, 1.0, 1.5 \text{ s, } \zeta = 0.05, m = 1, \quad (69)$$

Donde: T = período natural del oscilador; ζ = razón de amortiguamiento crítico; m = masa. Los cuatro valores de T corresponden a los osciladores evaluados.

$$\text{con } k = m(2\pi/T)^2 \text{ y } c = 2\zeta m(2\pi/T).$$

La referencia numérica fue un integrador Runge-Kutta de cuarto orden con paso fino $\Delta t_{ref} = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$, utilizando interpolación lineal del acelerograma. Se compararon diferencias centrales, Newmark de aceleración promedio, 1PIM estabilizado y 2PIM con los pasos

$$\Delta t = 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10 \text{ s.} \quad (70)$$

Donde: Δt = paso temporal empleado en cada corrida de la validación numérica.

La métrica principal fue

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - u_i^{ref})^2}. \quad (71)$$

Donde: RMSE = raíz del error cuadrático medio; N = número de muestras comparadas; u_i = respuesta del método evaluado; u_{iref} = respuesta de referencia en el paso i .



7. Resultados de error y convergencia

7.1. RMSE promedio sobre los cuatro períodos

Tabla 1. RMSE promedio sobre los cuatro períodos.

Δt [s]	Diferencias centrales	Newmark	1PIM	2PIM
0.01	2.12×10^{-4}	3.68×10^{-4}	2.07×10^{-4}	4.71×10^{-8}
0.02	8.03×10^{-4}	1.48×10^{-3}	7.94×10^{-4}	1.16×10^{-4}
0.04	3.55×10^{-3}	5.30×10^{-3}	3.50×10^{-3}	7.08×10^{-4}
0.06	8.26×10^{-3}	1.24×10^{-2}	7.88×10^{-3}	3.17×10^{-3}
0.08	1.46×10^{-2}	1.90×10^{-2}	1.43×10^{-2}	7.26×10^{-3}
0.10	Inestable (caso corto)	3.36×10^{-2}	Inestable (caso corto)	1.72×10^{-2}

En el intervalo $0.01 \leq \Delta t \leq 0.08$ s, 1PIM y diferencias centrales presentan errores prácticamente del mismo orden. Este resultado concuerda con el análisis de raíces: 1PIM estabilizado elimina la raíz parásita, pero conserva una dinámica física muy próxima al esquema central.

2PIM presenta el menor RMSE promedio en todos los pasos ensayados. La diferencia se hace especialmente relevante cuando Δt crece. Con $\Delta t = 0.02$ s, 2PIM produce un error promedio menor que Newmark con $\Delta t = 0.01$ s, aun empleando aproximadamente la mitad de los pasos. Con $\Delta t = 0.04$ s, el error de 2PIM continúa del mismo orden que los métodos clásicos utilizando un número de pasos aproximadamente cuatro veces menor que el caso base de 0.01 s.

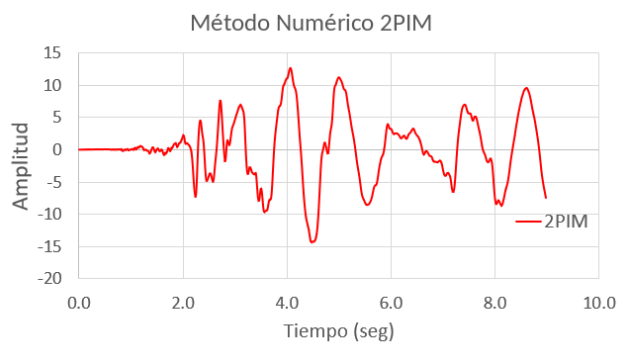


Figura 1. Respuesta dinámica calculada con 2PIM para el sismo de Kobe-Takatori 90°.

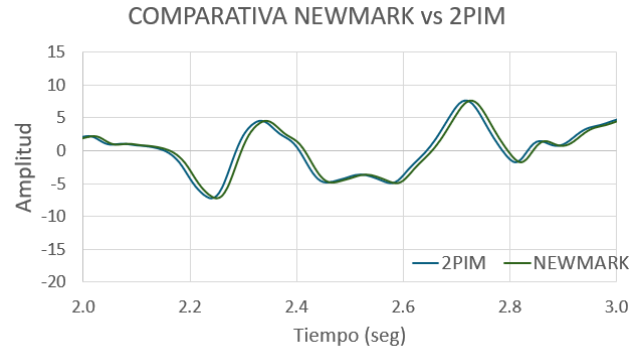


Figura 2. Comparación de respuesta entre Newmark y 2PIM para el sismo de Kobe-Takatori 90°.

7.2. Caso crítico

En el oscilador de período más corto, diferencias centrales y 1PIM exceden su región estable al alcanzar

$$\omega \Delta t = \frac{2\pi}{0.3} (0.10) \approx 2.094 > 2. \quad (72)$$

Donde: ω = frecuencia circular natural; T = período natural; Δt = paso temporal; el valor 2 es el límite clásico de estabilidad de diferencias centrales y 1PIM para el oscilador no amortiguado.

El comportamiento observado es consistente con el límite teórico. Newmark permanece estable. 2PIM también permanece acotado en esta prueba y presenta menor error que Newmark:

Tabla 2. Caso crítico de estabilidad y error.

Método	RMSE [m]	Máximo error absoluto [m]	Estado
Diferencias centrales	5.42×10^{14}	4.13×10^{15}	Inestable
Newmark	1.72×10^{-2}	4.99×10^{-2}	Estable
1PIM	1.52×10^{20}	1.24×10^{21}	Inestable
2PIM	4.15×10^{-3}	1.37×10^{-2}	Estable

Para este caso particular, el RMSE de 2PIM es aproximadamente cuatro veces menor que el de Newmark.

7.3. Orden de convergencia observado

El orden observado entre dos pasos puede estimarse mediante

$$p_{obs} = \frac{\ln(E_2/E_1)}{\ln(\Delta t_2/\Delta t_1)}. \quad (73)$$

Donde: p_{obs} = orden de convergencia observado; E_1 y E_2 = errores medidos con los pasos Δt_1 y Δt_2 ; $\ln$ = logaritmo natural.

Diferencias centrales y 1PIM muestran valores próximos a $p \approx 2$ en el rango estable, coherentes con un comportamiento global de segundo orden. Newmark de aceleración promedio también presenta comportamiento esencialmente de segundo orden.

2PIM exhibe una disminución del error más rápida: en los intervalos $0.02 \rightarrow 0.04$, $0.04 \rightarrow 0.06$, $0.06 \rightarrow 0.08$ y $0.08 \rightarrow 0.10$ s, los órdenes observados sobre el RMSE promedio fueron aproximadamente 2.61, 3.69, 2.89 y 3.86, respectivamente.

Estos valores no deben interpretarse todavía como una demostración formal de orden cuatro. El acelerograma, su interpolación, la ventana temporal y la referencia numérica afectan la estimación. El resultado sí indica que 2PIM presenta una tendencia de convergencia de orden superior a los esquemas de segundo orden en esta prueba.

8. Discusión de eficiencia

El costo por paso de diferencias centrales es mínimo. 1PIM añade algunos productos pero conserva una única recurrencia escalar; por ello su costo por paso es bajo. Newmark resuelve una ecuación efectiva por paso en el caso lineal SDOF y 2PIM resuelve un sistema interno 2×2 .



La eficiencia global, sin embargo, no depende únicamente del costo de un paso, sino del número de pasos requeridos para alcanzar una precisión objetivo. Los resultados preliminares sugieren que 2PIM puede utilizar pasos entre dos y cuatro veces mayores que los métodos de referencia para errores del mismo orden en los casos estudiados. Esta ventaja potencial debe confirmarse mediante mediciones directas de tiempo de CPU y extensión a MDOF, donde el costo algebraico interno puede adquirir mayor peso.

Por el contrario, 1PIM no muestra todavía una ventaja clara de precisión respecto de diferencias centrales. Su interés actual es conceptual: demuestra que una interpolación cúbica puede diseñarse con una raíz parásita nula, pero la parte física del esquema mantiene una precisión cercana a segundo orden.

9. Antecedentes y originalidad de la arquitectura 2PIM

La literatura contiene métodos previos basados en aceleración cuadrática. El trabajo de Ghassemieh y Karimi-Rad [4] emplea dos parámetros variables para controlar estabilidad y precisión. Gholampour y Ghassemieh [5] utilizan una condición de residuo ponderado, y el desarrollo publicado posteriormente [6] combina condiciones iniciales, equilibrio en los extremos y un residual integral ponderado para determinar los cinco coeficientes del desplazamiento cuártico.

2PIM no reclama como original la idea general de una aceleración cuadrática. La característica específica investigada aquí es la combinación

$$\{a_i, a_{i+1/2}, a_{i+1}\} \quad (74)$$

Donde: a_i , $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} = aceleraciones en el inicio, punto medio y extremo del paso que definen la arquitectura 2PIM.

junto con equilibrio dinámico en

$$t_{i+1/2} \quad \text{y} \quad t_{i+1}, \quad (75)$$

Donde: $t_{i+1/2}$ = instante de punto medio; t_{i+1} = instante final del paso; i = índice temporal. y solución directa de las dos aceleraciones desconocidas mediante un sistema 2×2 .





La arquitectura aquí estudiada deriva de la línea hPIM previamente planteada por Moncayo Theurer [9].

10. Conclusiones

1. La estabilidad de 1PIM sigue siendo condicional y, para $c = 0$, cumple $\omega\Delta t \leq 2$. Su comportamiento numérico es muy próximo a diferencias centrales y su convergencia observada es aproximadamente de segundo orden.
2. 2PIM utiliza aceleración cuadrática, velocidad cúbica y desplazamiento cuártico, y resuelve en cada paso las aceleraciones $a_{i+1/2}$ y a_{i+1} mediante un sistema interno 2×2 .
3. En la validación preliminar de Kobe, 2PIM presentó el menor RMSE promedio de los cuatro métodos para todos los pasos ensayados entre 0.01 y 0.08 s.
4. En el caso $T = 0.3$ s y $\Delta t = 0.10$ s, diferencias centrales y 1PIM fueron inestables; Newmark y 2PIM permanecieron acotados, y 2PIM presentó un RMSE aproximadamente cuatro veces menor que Newmark.
5. Los resultados sugieren que 2PIM puede alcanzar una precisión comparable utilizando menos pasos, lo que constituye una posible ventaja de eficiencia. Esta hipótesis debe confirmarse mediante medición de costo computacional.

Referencias

- [1] Newmark, N. M. (1959). *A Method of Computation for Structural Dynamics*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85(EM3), 67–94. DOI: 10.1061/JMCEA3.0000098.
- [2] OpenSees Documentation. *Newmark Method*. OpenSees transient integrator documentation. Consultado en septiembre de 2026.
- [3] OpenSees Documentation. *Central Difference*. OpenSees transient integrator documentation. Consultado en septiembre de 2026.





- [4] Ghassemieh, M., & Karimi-Rad, M. (2008). *A Quadratic Acceleration Time Integration Method for Problems in Structural Dynamics*. 8th International Congress on Advances in Civil Engineering, Eastern Mediterranean University, Famagusta, North Cyprus.
- [5] Gholampour, A. A., & Ghassemieh, M. (2010). *A Weighted Residual Quadratic Acceleration Time Integration Method in Nonlinear Structural Dynamics*. ICCRD 2010. DOI: 10.1109/ICCRD.2010.123.
- [6] Gholampour, A. A., & Ghassemieh, M. (2013). *Nonlinear Structural Dynamics Analysis Using Weighted Residual Integration*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 20(3), 199–216. DOI: 10.1080/15376494.2011.584146.
- [7] Chopra, A. K. (2017). Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. 5th ed. Pearson.
- [8] Bathe, K.-J. (1996). Finite Element Procedures. Prentice Hall. Secciones de integración directa en el tiempo y estabilidad numérica.
- [9] Moncayo Theurer, M. (2026). hPIM — Higher-order Polynomial Integration Method: propuesta de integración dinámica mediante elevación del grado de interpolación polinómica. Documento técnico de formulación conceptual, desarrollado inicialmente bajo la denominación de trabajo PDI. THEK Research Institute, Ecuador.

